**ОПТИМАЛЬНЫЕ ЭЙЛЕРОВЫ КОНГРУЭНЦИИ БИНАРНЫХ НЕОРИЕНТИРОВАННЫХ ДЕРЕВЬЕВ.**

**А. В. Гавриков**

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия.*

**Аннотация.**

Общая постановка задачи формулируется следующим образом. Пусть *К* – некоторый класс графов, а *G* – граф, не принадлежащий *К*. Требуется произвести те или иные изменения в структуре графа *G*, чтобы полученный граф *G/* оказался *К*-графом (см. [4]). Очевидное требование, чтобы все вышеперечисленные изменения были оптимальными в том или ином смысле.

В данной работе в качества класса *К* рассматривается класс эйлеровых графов. Класс эйлеровых графов является одним из важнейших классов, используемых в приложениях. В качества класса *G* рассматривается класс бинарных неориентированных деревьев. Класс бинарных неориентированных деревьев представляет собой большой теоретический интерес в силу того, что широко используются в качестве «базиса» для различных структур данных, таких как двоичная куча, красно-черное дерево, фибоначчиева куча и т. п.

В работе решена задача нахождения оптимальных эйлеровых конгруэнций бинарных неориентированных деревьев. Получен конструктивный алгоритм решения задачи, имеющий полиномиальную асимптотическую сложность. Уточним, что в эйлеровых графах, являющихся ответом на поставленную задачу, допускается наличие петель, в силу того, что существуют бинарные неориентированные деревья, для которых любой факторграф по оптимальной эйлеровой конгруэнции содержит петли (к примеру, цепи *P2* и *P3*).

**Основные определения.**

*Ориентированным графом* (или, для краткости, орграфом) называется пара **,** где ****– конечное непустое множество (вершины орграфа), а ****– отношение на множестве ****(дуги орграфа).

*Неориентированным графом* (или, для краткости, графом) называется пара **,** где ****– конечное непустое множество (вершины графа), а ****– антирефлексивное, симметричное отношение на множестве ****(ребра графа).

*Путем* в графе называется последовательность ребер, в которой каждые два соседних ребра имеют общую вершину, и никакое ребро не встречается более одного раза. При этом, оба конца каждого ребра, кроме первого и последнего, являются концами соседних с ним ребер пути.

*Длиной пути* называется количество входящих в него ребер.

Путь называется *циклическим*, если его конечная и начальная вершины совпадают.

Путь длины  называется *эйлеровым*.

*Расстоянием* между вершинами****и**** в графе называется длина кратчайшего пути между вершинами****и****. Расстояние между вершинами ****и**** обозначаем через****

Граф, в котором существует циклический эйлеров путь, называется *эйлеровым*.

*Степенью* вершины **** в графе называется количество ребер, содержащих вершину ****. Степень вершины **** обозначаютчерез****.

Граф называется *связным*, если между любой парой его вершин существует путь.

*Неориентированным деревом* (или, для краткости, деревом) называется связный граф без циклов.

Дерево называется *бинарным*, если степень каждой его вершины не превосходит 3.

*Факторграфом* графа ****по эквивалентности **** называется граф ****, где ** –** множество классов эквивалентности ****, а ****

 Если **–** некоторый класс графов и ** –** произвольный граф, то *******-конгруэнцией* графа ****называется отношение эквивалентности ****на множестве его вершин такое, что факторграф****принадлежит ****.

****-конгруэнция графа называется *эйлеровой*, если класс ****– класс эйлеровых графов.

Эйлерова конгруэнция ****называется *оптимальной*, если не существует такой эйлеровой конгруэнции ****, что ****.

Отношение эквивалентности ****называется *тривиальным*,если ****(см. [3]).

Два ребра являются *смежными*, если они имеют общую вершину.

*Паросочетанием* в графе ****называется множество попарно несмежных ребер.

*Мощностью* паросочетания называется количество ребер в нем.

*Максимальнымпаросочетанием* в графе ****называется паросочетание с наибольшим число ребер среди всех остальных паросочетаний графа**.**

**Постановка задачи.**

Дано произвольное бинарное неориентированное дерево. Необходимо найти одну из его оптимальных эйлеровых конгруэнций.

**Решение задачи.**

Вершины в бинарных деревьях можно разделить на три группы: вершины, которые имеют степень 1 (листья),вершины, которые имеют степень 2 ивершины, которые имеют степень 3.Введем следующие обозначения: ****– количество вершин степени 1,– количество вершин степени 2, – количество вершин степени 3.

**Лемма 1.** В любом бинарном неориентированном дереве выполняется:****.□

**Теорема 1 (см. [2]).** Связный графтогдаи только тогда является эйлеровым, когда степень каждой его вершины четна. □

Из теоремы следует, что пока в графе существуют нечетные вершины, он не является эйлеровым. В силу этого, в первую очередь в решении задачи необходимо «избавляться» от нечетных вершин.

**Теорема 2.** Для любых двух отношений эквивалентности **** ориентированного графа  верно утверждение . □ (см. 3). □

Смысл теоремы заключается в том, что решение исходной задачи можно строить «пошагово», т. е. сначала отождествляя какую-либо пару вершин, затем другую пару вершин и т. д.Отождествлениедвух вершин в графе есть факторизацияпо тривиальному отношению эквивалентности. Будем говорить, что вершина входит в отождествление, если ее отождествляют с другой вершиной в графе, т. е. если она является одной из двух вершин, из которых состоит отождествление.

Рассмотрим пары вершин, отождествление которых уменьшает общее количество нечетных вершин в бинарном дереве на 2.

1. Отождествление двух листьев (вершин степени 1), расстояние между которыми не равно 2.
2. Отождествление листа и вершины степени 3, расстояние между которыми равно 1.
3. Отождествление листа и вершины степени 3, расстояние между которыми больше 2.

Все вышеописанные отождествления назовем целесообразными.

Целесообразные отождествления называются *независимыми*, если отождествление пары вершин одного из них не исключает возможности отождествления пары вершин другого. К примеру, пары целесообразных отождествлений, которые не являются независимыми, показаны на рис. 1.

 рис. 1

Формально, в исходном бинарном дереве **** существуют вершины *u, v, s, w, z*; при этом ****, ****, ****, ****, ****,****, ****, ****и необходимо отождествить пары вершин **** и ****. При отождествлении вершин *u* и *w*, пара вершин **** уже не будет образовывать целесообразное отождествление, по причине того, что расстояние между ними станет равно *2*. Однако, в случае возникновения данной ситуации ее можно легко избежать, если заменить пары вершин **** и **** на пары **** и **** (эти целесообразные отождествления являются независимыми).

Заметим, что отождествление двух листьев *u* и *v*, таких, что ****и отождествление листа**** и вершины**** степени *3*, таких, что ****, не изменяет расстояние между остальными вершинами в графе. Следовательно, любое целесообразное отождествление, взятое в совокупности с этими случаями, будет образовывать целесообразную пару.

Оценим минимальное количество целесообразных отождествлений.

**Лемма 2.** Минимальное количество целесообразных отождествлений не может быть меньше количества нечетных вершин в исходном бинарном дереве, деленное пополам, т. е.****.□

 Конструктивное решение поставленной задачи будем проводить «пошагово», т. е. отождествляя на каждом шаге какую-либо пару вершин.

 Далее ответим на вопрос, какие конкретно пары вершин надо будет отождествлять между собой?

 Множество попарно независимых целесообразных отождествлений, применение которыхреконструирует исходное бинарное дерево  в эйлеров граф **** есть решение поставленной задачи.Если мощность этого множества для бинарного дерева  будет составлять , то в силу леммы 2 получено оптимальное решение.

**Теорема 3.** Задача выбора множества попарно независимых целесообразных отождествлений в дереве эквивалентна задаче поиска максимального паросочетания в графе ****, где вершинами графа будут являться нечетные вершины бинарного дерева, а ребра графа будут соединять пары вершин, которые входят в какое-либо целесообразное отождествление.

**Доказательство.** Действительно, при таком подходе, как множество целесообразных отождествлений, так и максимальное паросочетание в построенном графе есть множество попарно независимых ребер. □

Резюмирует все вышесказанное. По исходному бинарному дереву ****построим «новый» граф**** такой, что вершинами графа **** будут вершины бинарного дерева ****, а ребрами графа будут те и только те пары вершин, которые входят вкакое-либо целесообразное отождествление. Далее, в построенном графе ****находим максимальное паросочетание .

Обозначим мощность найденного паросочетания через *s*. Если для бинарного дерева ****,  то в этом случае поставленная задача решена. После отождествления пар вершин, которые входят в паросочетание, получим эйлеров граф.

Рассмотрим случаи, когда . Такими случаями являются

1. Бинарные деревья на рис. 2, 3.

рис. 2 рис. 3

В таких бинарных деревьях существуют листья, находящиеся на расстоянии *2* друг от друга.

1. Бинарные деревья, в которых существует одна нечетная вершина степени *3*, которая находится на расстоянии *2* от всех листьев дерева.

Данная ситуация возможна только для четырех видов деревьев, которые изображенырис.*4, 5, 6, 7*.

рис. 4 рис. 5

 рис. 6 рис. 7

**Алгоритм.**

1. Проанализируем входное бинарное дерево, является ли оно изоморфным одному из частных случаев или нет. Если нет, то переходим к пункту 2, если да, то понятным образом строим оптимальную эйлерову конгруэнцию для этого частного случая.
2. По данному бинарному дереву строим граф ****Вершинами графа ****будут вершины бинарного дерева ****, а ребрами графа будут те и только те пары вершин, которые входятв некоторое целесообразное отождествление вершин в исходном дереве.
3. Находим максимальное паросочетание  в построенном графе ****.
4. Если в максимальное паросочетание попадут пары ребер, которые приводят к ситуации на рис. 1, то производим соответствующую замену этой пары ребер в паросочетании, как было сказано выше.
5. Пары вершин, которые содержатся в найденном максимальном паросочетании , отождествляем в исходном бинарном дереве. Получаем эйлеров граф.

Оптимальность алгоритма следует из леммы 2.

**Оценка асимптотической сложности.**

Поиск путей между вершинами бинарного дерева можно реализовать за, где , запустив из каждой вершины дерева обход в глубину, или обход в ширину. Поиск максимального паросочетания осуществляется при помощи алгоритма Эндмондса, основанного на теореме Бержа, за  (см. [5]). В общем асимптотическая сложность алгоритма не превосходит.

**Список литературы.**

1. *Богомолов А. М., Салий В. Н.*Алгебраические основы теории дискретных систем. – М.: Наука. Физматлит, 1997.
2. *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Риверс Р.* Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 1990.
3. *Мирзаянов М. Р.* Сильно связные конгруэнции ориентированных графов. // В кн. Теоретические проблемы информатики и ее приложений: Сб. науч. тр. / Под ред. проф. А. А. Сытника. – Саратов: Изд-во Сарат. Ун-та, 2006.
4. *Салий В. Н. Оптимальные реконструкции графов //* В кн.: Современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры. – Саратов; Изд-во Сарат. ун-та, 2008, 59-65.

5*.* [*http://e-maxx.ru/algo/matching\_edmonds - ссылка на 2.05.2012*](http://e-maxx.ru/algo/matching_edmonds%20-%20%D1%81%D1%81%D1%8B%D0%BB%D0%BA%D0%B0%20%D0%BD%D0%B0%202.05.2012) *г.*