**МОДЕЛИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫМ МНОЖЕСТВОМ КРИТЕРИЕВ**

**Д. С. Смирнова**

*Саратовский Государственный университет, Саратов, Россия*

1. Описание модели.

Будем рассматривать модель многокритериальной оптимизации по качественным критериям в виде

 $G= <A, (q\_{j})\_{j\in J}>$, (1)

где А – произвольное множество, содержащее не менее двух элементов (множество критериев), $q\_{j}$ - *j*-й критерий, который формально может быть задан как отображение $q\_{j}:A\rightarrow C\_{j}$, где $<C\_{j},\leq \_{j}>$ - некоторая цепь. Элемент $q\_{j}(a)\in C\_{j}$ представляет собой значение *j*-го критерия для альтернативы $a\in A$. Набор $q\left(a\right)=(q(a)\_{j})\_{j\in J}$ называется *векторной оценкой альтернативы* $a\in A$. Формально $q$ есть отображение множества $A$ в $\prod\_{j\in J}^{}C\_{j}$.

 Иногда на $q$ накладывают дополнительное условие:

 $\left(∀j\in J\right)q\_{j}\left(a\_{1}\right)=q\_{j}\left(a\_{2}\right)⟹a\_{1}=a\_{2}$ . (2)

 Обозначим через $ K$ класс моделей многокритериальной оптимизации вида (1) с дополнительным условием (2). Будем полагать, что на множестве $J$ задан частичный строгий порядок < . Для моделей $G\in K$ на множестве альтернатив $A$ определим бинарное отношение предпочтения $ω$ по формуле:

$a\_{1}\leq ^{ω}a\_{2}⇔\left(∀j\in J\right)\left(q\_{j}\left(a\_{1}\right)\leq ^{j}q\_{j}\left(a\_{2}\right)˅\left(∃i<j\right)q\_{i}\left(a\_{1}\right)<^{i}q\_{i}(a\_{2})\right)$ . (3)

 В настоящем для класса моделей $K$ решается ряд задач, связанных со свойствами отношения предпочтения.

1. Необходимое и достаточное условие при котором отношение предпочтения $ω$ является отношением порядка.

**Теорема 1**. Для того, чтобы для любой модели $G\in K$ отношение предпочтения $ω$ было отношением порядка, необходимо и достаточно, чтобы упорядоченное множество $<J, < >$ удовлетворяло условию обрыва убывающих цепей (условию ОУЦ).

 *Замечание.* В общем случае $ω$ не является отношением порядка. Действительно, если $<J, < >$ не удовлетворяет условию ОУЦ, то существует бесконечная цепь вида:

$$j\_{1}>j\_{2}>…>j\_{n}>…$$

Будем предполагать, что каждая цепь $C\_{j}$ имеет не менее двух элементов. Зафиксируем в цепи $C\_{j\_{s}}$ элементы $0\_{s}<1\_{s}$ .

 Рассмотрим задачу $G$ вида (1) для которой $A=\{a\_{1},a\_{2}\}$ и функции $q\_{j\_{s}}$ заданы таблицей 1 (для всех остальных $j\in J$ положим

 $q\_{j}\left(a\_{1}\right)= q\_{j}\left(a\_{2}\right)=1\_{s})$.

 Таблица 1

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | $$q\_{1}$$ | $$q\_{2}$$ | $$q\_{3}$$ | $$q\_{4}$$ | … |
| $$a\_{1}$$ | $$0\_{s}$$ | $$1\_{s}$$ | $$0\_{s}$$ | $$1\_{s}$$ | … |
| $$a\_{2}$$ | $$1\_{s}$$ | $$0\_{s}$$ | $$1\_{s}$$ | $$0\_{s}$$ | … |

Покажем соотношение $a\_{1}\leq ^{ω}a\_{2}$ , используя (3). Из анализа таблицы получаем, что при нечетных s имеем $q\_{j\_{s}}\left(a\_{1}\right)=0\_{s}<1\_{s}=q\_{j\_{s}}\left(a\_{2}\right)$. Если s нечетно, то мы переходим к более важному критерию с номером s+1 и получаем $q\_{s+1}\left(a\_{1}\right)<q\_{s+1}(a\_{2})$ . Таким образом соотношение $a\_{1}\leq ^{ω}a\_{2}$ проверено.

Аналогично, выполнено $a\_{2}\leq ^{ω}a\_{1}$. Однако, условие $a\_{1}=a\_{2}$ здесь не имеет места, так как $q\_{j\_{s}}(a\_{1})\ne q\_{j\_{s}}(a\_{2})$ для всех s=1, 2, …. Таким образом отношение предпочтения $ω$ для построенной задачи не является антисимметричным, а значит не является отношением порядка.

1. Условие внешней устойчивости множества Парето оптимальных альтернатив.

С каждой моделью многокритериальной оптимизации $G$ вида (1) можно связать структуру Парето предпочтения $<A, \leq ^{Par}>$, где отношение предпочтения $\leq ^{Par}$ определяется по следующей формуле:

 $ a\_{1}\leq ^{ω\_{Par}}a\_{2}⇔\left(∀j\in J\right)q\_{j}\left(a\_{1}\right)\leq ^{j}q\_{j}\left(a\_{2}\right)$ . (4)

Обозначим через $A^{\*}$ множество альтернатив из $A$ максимальных относительно порядка $\leq ^{Par}$(Парето оптимальных альтернатив). Условие внешней устойчивости множества $A^{\*}$ состоит в следующем:

 $\left(∀a\in A\right)(∃a^{\*}\in A^{\*})a\leq ^{Par}a^{\*}$. (5)

**Теорема 2.** Пусть $G$ - модель многокритериальной оптимизации вида (1). Если все $<C\_{j},\leq \_{j}>$ удовлетворяют условию максимальности и множество $J$ конечно, то для модели $G$ выполнено условие внешней устойчивости.

*Доказательство.*

**Лемма 1**. Если все $<C\_{j},\leq \_{j}>$ удовлетворяют условию максимальности и множество $J$ конечно, то $<\prod\_{j\in J}^{}C\_{j},\leq ^{Par}>$ удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей (условию ОВЦ).

Доказательство леммы. Положим $ | J |=n$. Предположим, что

$<\prod\_{j\in J}^{}C\_{j},\leq ^{Par}>$ не удовлетворяет условию ОВЦ. Тогда существует бесконечная последовательность элементов из $\prod\_{j\in J}^{}C\_{j}$ вида:

 $\left(c\_{1}^{1},…,c\_{n}^{1}\right)>\left(c\_{1}^{2},…,c\_{n}^{2}\right)>…>\left(c\_{1}^{k},…,c\_{n}^{k}\right)>…$ (6)

Из первого неравенства в (7) получаем, что существуют элементы $c\_{j\_{1}}^{1}>c\_{j\_{1}}^{2}$;

из второго неравенства получаем, что существуют элементы $c\_{j\_{2}}^{2}>c\_{j\_{2}}^{3}$;

из k-го неравенства получаем, что существуют элементы $c\_{j\_{k}}^{k}>c\_{j\_{k}}^{k+1}$;

и т. д.

 Среди номеров $j\_{1},…,j\_{k}$ хотя бы один из них будет повторяться бесконечное число раз, так как последовательность (6) бесконечная. Пусть $j\_{s}$ повторяется бесконечное число раз, тогда получаем в $C\_{j\_{s}}$бесконечную возрастающую последовательность, что противоречит условию ОВЦ для упорядоченного множества $<C\_{j\_{s}},\leq \_{j\_{s}}>$. Учитывая, что условие ОВЦ равносильно условию максимальности, получаем доказательство леммы 1.

Перейдем к доказательству теоремы 2.

В силу формулы (4) и инъективности отображения $q$ получаем, что упорядоченные множества $<A,ω\_{Par}>$и $<\prod\_{j\in J}^{}C\_{j},\leq ^{Par}>$ изоморфны. Упорядоченное множество $<\prod\_{j\in J}^{}C\_{j},\leq ^{Par}>$ удовлетворяет условию ОВЦ по лемме 1, следовательно упорядоченное множество $<A,ω\_{Par}>$ также удовлетворяет условию ОВЦ.

Покажем условие внешней устойчивости (5) для модели $G$. Зафиксируем $a\in A$. Возможны два случая: 1) $a\in A^{\*}$, 2) $a\notin A^{\*}$. В первом случае имеет место $a\leq ^{Par}a$ и (5) выполнено тривиальным образом. Во втором случае из определения максимального элемента получаем, что $a<^{Par}a\_{1}$ для некоторого $a\_{1}\in A$. Если $a\_{1}$ максимальный элемент, то (5) выполнено, если $a\_{1}\notin A$ , то из определения максимального элемента получаем, что $a\_{1}<^{Par}a\_{2}$ для некоторого $a\_{2}\in A$ и т.д.

В результате получаем последовательность

 $a<^{Par}a\_{1}<^{Par}a\_{2}<^{Par}… $,

а так как $<A,ω\_{Par}>$ удовлетворяет условию ОВЦ, то эта последовательность оборвется на конечном номере *k* , причем $a\leq ^{Par}a\_{k}$ и $a\_{k}\in A^{\*}$, то есть для модели $G$ выполнено условие внешней устойчивости. Теорема 2 доказана.

1. Рассмотрим теперь модель многокритериальной оптимизации по

качественным критериям в виде $G= <A, (q\_{j})\_{j\in J}>$, где $A$ -топологическое пространство, $<C\_{j},\leq \_{j}>$ - линейно упорядоченное топологическое пространство и отображение $q\_{j}:A\rightarrow C\_{j}$ является непрерывным при каждом $j\in J$. На множестве $A$ задано отношение предпочтения $ω\_{Par}$, определяемое формулой (4).

**Теорема 3.** Пусть дана модель многокритериальной оптимизации виде $G= <A, (q\_{j})\_{j\in J}>$, где $A$- компактное топологическое пространство, $<C\_{j},\leq \_{j}>$ - упорядоченное топологическое пространство и отображение $q\_{j}:A\rightarrow C\_{j}$ является непрерывным при каждом $j\in J$. Тогда для модели $G$ выполнено условие внешней устойчивости.

Доказательство разбивается на ряд лемм.

**Лемма 2.** Cрез $ω<a\_{0}>=\left\{a\in A:q\_{j}\left(a\right)\geq q\_{j}\left(a\_{0}\right)∀j\in J\right\}$ является замкнутым множеством.

*Доказательство.* При любом фиксированном $j\in J$ срез

 $ω\_{j}<a\_{0}>=\{a\in A:q\_{j}(a)\geq ^{j}q\_{j}(a\_{0})\}$ является замкнутым множеством, как прообраз замкнутого множества при непрерывном отображении. Тогда срез

$ω<a\_{0}>=\left\{a\in A:q\_{j}\left(a\right)\geq q\_{j}\left(a\_{0}\right)∀j\in J\right\}=\bigcap\_{j\in J}^{}ω\_{j}<a\_{0}>$

является замкнутым множеством как пересечение замкнутых множеств.

Лемма доказана.

**Лемма Цорна.** Пусть упорядоченное множество удовлетворяет условию индуктивности: каждая цепь имеет мажоранту. Тогда любой элемент этого упорядоченного множества мажорируется некоторым максимальным элементом.

Перейдем к доказательству теоремы. Проверим для упорядоченного множечтва $<A, \leq ^{ω\_{Par}}>$ условие индуктивности. Пусть $S$ - цепь в

 $<A, \leq ^{ω\_{Par}}>$. Справедлива следующая эквивалентность:

 $a\_{1}\leq ^{ω\_{Par}}a\_{2 }⇔ω\_{Par}<a\_{2}>⊆ω\_{Par}<a\_{1}>$ (7)

Так как $S$ – цепь, то согласно формуле (7) семейство срезов

 $(ω\_{Par}<s>)\_{s\in S}$ образует цепь относительно включения. Покажем, что она центрирована, то есть, что каждое конечное подсемейство этого семейства имеет непустое пересечение. В самом деле, зафиксируем произвольно конечное подмножество $S\_{1}⊆S$, тогда оно имеет наибольший элемент $s^{0}\in S\_{1}$, то есть $\left(∀s\in S\right) s\leq ^{ω\_{Par}}s^{0}$. Согласно (7)

 $\left(∀s\in S\_{1}\right)ω<s^{0}>⊆ω<s>$. Отсюда $\bigcap\_{sϵS\_{1}}^{}ω<s>=ω<s^{0}>$; учитывая, что $s^{0}\in ω<s^{0}>$ получаем, что $s^{0}\in \bigcap\_{s\in S\_{1}}^{}ω<s>$, то есть $\bigcap\_{s\in S\_{1}}^{}ω<s>\ne ∅$. В силу компактности топологического пространства $A $и учитывая, что все срезы $ω<s>$ замкнуты по Лемме 2, получаем, что семейство срезов $(ω<s>)\_{s\in S}$ имеет непустое пересечение. Пусть $s^{\*}\in \bigcap\_{s\in S}^{}ω<s>$, тогда $\left(∀s\in S\right)s\leq s^{\*}$, то есть $s^{\*}$ мажоранта цепи $S$. Мы показали, что упорядоченное множество $<A, \leq ^{ω\_{Par}}> $ удовлетворяет условию индуктивности. Применим лемму Цорна к индуктивно упорядоченному множеству $<A, \leq ^{ω\_{Par}}>$. Получаем, что для дюбого$a\in A$ имеет место соотношение $a\leq ^{ω\_{Par}}\overbar{a}$ , где $\overbar{a}$ - максимальный элемент. Учитывая, что максимальные элементы относительно $ω\_{Par}$ - это, в точности, альтернативы, оптимальные по Парето, получаем, что Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Скорняков Л. А*. Элементы теории структур. М: Наука, 1970
2. *Подиновский В. В., Ногин В. Д*. Парето-оптимальные решениямногокритериальных задач. М: Наука, 1982, 256 с.