**МОДЕЛИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫМ МНОЖЕСТВОМ КРИТЕРИЕВ**

**Д. С. Смирнова**

*Саратовский Государственный университет, Саратов, Россия*

1. Описание модели.

Будем рассматривать модель многокритериальной оптимизации по качественным критериям в виде

, (1)

где А – произвольное множество, содержащее не менее двух элементов (множество критериев), - *j*-й критерий, который формально может быть задан как отображение , где - некоторая цепь. Элемент представляет собой значение *j*-го критерия для альтернативы . Набор называется *векторной оценкой альтернативы* . Формально есть отображение множества в .

Иногда на накладывают дополнительное условие:

. (2)

Обозначим через класс моделей многокритериальной оптимизации вида (1) с дополнительным условием (2). Будем полагать, что на множестве задан частичный строгий порядок < . Для моделей на множестве альтернатив определим бинарное отношение предпочтения по формуле:

. (3)

В настоящем для класса моделей решается ряд задач, связанных со свойствами отношения предпочтения.

1. Необходимое и достаточное условие при котором отношение предпочтения является отношением порядка.

**Теорема 1**. Для того, чтобы для любой модели отношение предпочтения было отношением порядка, необходимо и достаточно, чтобы упорядоченное множество удовлетворяло условию обрыва убывающих цепей (условию ОУЦ).

*Замечание.* В общем случае не является отношением порядка. Действительно, если не удовлетворяет условию ОУЦ, то существует бесконечная цепь вида:

Будем предполагать, что каждая цепь имеет не менее двух элементов. Зафиксируем в цепи элементы .

Рассмотрим задачу вида (1) для которой и функции заданы таблицей 1 (для всех остальных положим

.

Таблица 1

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  | … |
|  |  |  |  |  | … |
|  |  |  |  |  | … |

Покажем соотношение , используя (3). Из анализа таблицы получаем, что при нечетных s имеем . Если s нечетно, то мы переходим к более важному критерию с номером s+1 и получаем . Таким образом соотношение проверено.

Аналогично, выполнено . Однако, условие здесь не имеет места, так как для всех s=1, 2, …. Таким образом отношение предпочтения для построенной задачи не является антисимметричным, а значит не является отношением порядка.

1. Условие внешней устойчивости множества Парето оптимальных альтернатив.

С каждой моделью многокритериальной оптимизации вида (1) можно связать структуру Парето предпочтения , где отношение предпочтения определяется по следующей формуле:

. (4)

Обозначим через множество альтернатив из максимальных относительно порядка (Парето оптимальных альтернатив). Условие внешней устойчивости множества состоит в следующем:

. (5)

**Теорема 2.** Пусть - модель многокритериальной оптимизации вида (1). Если все удовлетворяют условию максимальности и множество конечно, то для модели выполнено условие внешней устойчивости.

*Доказательство.*

**Лемма 1**. Если все удовлетворяют условию максимальности и множество конечно, то удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей (условию ОВЦ).

Доказательство леммы. Положим . Предположим, что

не удовлетворяет условию ОВЦ. Тогда существует бесконечная последовательность элементов из вида:

(6)

Из первого неравенства в (7) получаем, что существуют элементы ;

из второго неравенства получаем, что существуют элементы ;

из k-го неравенства получаем, что существуют элементы ;

и т. д.

Среди номеров хотя бы один из них будет повторяться бесконечное число раз, так как последовательность (6) бесконечная. Пусть повторяется бесконечное число раз, тогда получаем в бесконечную возрастающую последовательность, что противоречит условию ОВЦ для упорядоченного множества . Учитывая, что условие ОВЦ равносильно условию максимальности, получаем доказательство леммы 1.

Перейдем к доказательству теоремы 2.

В силу формулы (4) и инъективности отображения получаем, что упорядоченные множества и изоморфны. Упорядоченное множество удовлетворяет условию ОВЦ по лемме 1, следовательно упорядоченное множество также удовлетворяет условию ОВЦ.

Покажем условие внешней устойчивости (5) для модели . Зафиксируем . Возможны два случая: 1) , 2) . В первом случае имеет место и (5) выполнено тривиальным образом. Во втором случае из определения максимального элемента получаем, что для некоторого . Если максимальный элемент, то (5) выполнено, если , то из определения максимального элемента получаем, что для некоторого и т.д.

В результате получаем последовательность

,

а так как удовлетворяет условию ОВЦ, то эта последовательность оборвется на конечном номере *k* , причем и , то есть для модели выполнено условие внешней устойчивости. Теорема 2 доказана.

1. Рассмотрим теперь модель многокритериальной оптимизации по

качественным критериям в виде , где -топологическое пространство, - линейно упорядоченное топологическое пространство и отображение является непрерывным при каждом . На множестве задано отношение предпочтения , определяемое формулой (4).

**Теорема 3.** Пусть дана модель многокритериальной оптимизации виде , где - компактное топологическое пространство, - упорядоченное топологическое пространство и отображение является непрерывным при каждом . Тогда для модели выполнено условие внешней устойчивости.

Доказательство разбивается на ряд лемм.

**Лемма 2.** Cрез является замкнутым множеством.

*Доказательство.* При любом фиксированном срез

является замкнутым множеством, как прообраз замкнутого множества при непрерывном отображении. Тогда срез

является замкнутым множеством как пересечение замкнутых множеств.

Лемма доказана.

**Лемма Цорна.** Пусть упорядоченное множество удовлетворяет условию индуктивности: каждая цепь имеет мажоранту. Тогда любой элемент этого упорядоченного множества мажорируется некоторым максимальным элементом.

Перейдем к доказательству теоремы. Проверим для упорядоченного множечтва условие индуктивности. Пусть - цепь в

. Справедлива следующая эквивалентность:

(7)

Так как – цепь, то согласно формуле (7) семейство срезов

образует цепь относительно включения. Покажем, что она центрирована, то есть, что каждое конечное подсемейство этого семейства имеет непустое пересечение. В самом деле, зафиксируем произвольно конечное подмножество , тогда оно имеет наибольший элемент , то есть . Согласно (7)

. Отсюда ; учитывая, что получаем, что , то есть . В силу компактности топологического пространства и учитывая, что все срезы замкнуты по Лемме 2, получаем, что семейство срезов имеет непустое пересечение. Пусть , тогда , то есть мажоранта цепи . Мы показали, что упорядоченное множество удовлетворяет условию индуктивности. Применим лемму Цорна к индуктивно упорядоченному множеству . Получаем, что для дюбого имеет место соотношение , где - максимальный элемент. Учитывая, что максимальные элементы относительно - это, в точности, альтернативы, оптимальные по Парето, получаем, что Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Скорняков Л. А*. Элементы теории структур. М: Наука, 1970
2. *Подиновский В. В., Ногин В. Д*. Парето-оптимальные решениямногокритериальных задач. М: Наука, 1982, 256 с.