**О МИНИМАЛЬНЫХ ПРИМИТИВНЫХ РАСШИРЕНИЯХ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ ПУТЕМ ДОБАВЛЕНИЯ ДУГ**

**Н. А. Коровина**

*Национальный исследовательский Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия*

Общая постановка задачи формулируется следующим образом. Пусть – некоторый класс графов и – граф, не принадлежащий . Требуется произвести те или иные изменения в структуре графа чтобы полученный граф оказался **-**графом (см. [1]). В качестве допустимых реконструкций данного графа можно рассматривать следующие: отождествление некоторых вершин графа, ориентация ребер данного неориентированного графа, переориентация некоторых дуг, добавление новых дуг (ребер), удаление некоторых дуг (ребер). В данной работе в качестве реконструкции рассматривается добавление к данному графу минимального числа дуг.

Задача оптимальных эйлеровых реконструкций орграфов путем добавления дуг была решена А.В. Гавриковым (см. [2]). Задача минимальных сильно связных реконструкций ориентированных графов была решена А.С. Кадушкиной (см. [3]). Данная работа посвящена минимальным примитивным реконструкциям ориентированных графов. В работе В.Н. Салия (см. [4]) получены полные решения задачи о минимальных примитивных расширениях для выходящих деревьев и линейных графов типа I. Также представлены частичные решения для линейных графов типа II и многоугольных графов.

Граф с матрицей смежности называется примитивным, если существует целое число такое, что каждая вершина графа достижима из любой вершины за *r* шагов (иначе говоря, если в матрице все элементы равны 1). Основным инструментом в доказательствах является критерий примитивности: сильно связный граф примитивен тогда и только тогда, когда наибольший общий делитель длин всех его контуров равен 1.

Наименьшее натуральное в матрице все элементы равны 1, называется индексом графа . Будем обозначать индекс графа через . Известна достижимая абсолютная оценка индекса любого примитивного - вершинного орграфа (см. [5]):

Пусть обозначает количество добавочных дуг в минимальном сильно связном расширении графа , т.е. , а – количество добавочных дуг в минимальном примитивном расширении графа

Многоугольный граф с вершинами – это граф, полученный из контура переориентацией некоторых его дуг. Если под степенью вершины понимать количество дуг, которым она инцидентна, то в многоугольном графе каждая вершина имеет степень 2. Количество источников в многоугольном графе равно количеству стоков. Пусть φ – некоторая биекция между множеством стоков и множеством источников данного многоугольного графа *C.* Если к *С* присоединить все дуги вида , где – сток, получится расширение графа *C*, назовем его φ **-** расширением.

**Теорема 1 (см. [4]).** Для любой биекции φ между множеством стоков и множеством источников многоугольного графа соответствующее его φ**-**расширение является минимальным сильно связным расширением.

**Теорема 2 (см. [4]).** Если сильно связный граф не является примитивным, то его минимальное примитивное расширение получается добавлением одной дуги.

**Теорема 3.** Для многоугольного графа с стоками (источниками) его минимальное примитивное расширение получается добавлением не более чем дуг (либо либо ), т.е. .

Доказательство. Пусть есть многоугольный граф , который имеет стоков (и, соответственно, источников).

1. Рассмотрим произвольную биекцию φ между множеством стоков и множеством источников графа Присоединим к все дуги вида , где – сток. Т.е. получили φ-расширение графа .

Следовательно, является сильно связным графом (по теореме 1).

Если является примитивным, то получили минимальное примитивное расширение с помощью добавления дуг, т.е.

1. Если не является примитивным, то достаточно добавить одну дугу, чтобы получить минимальное примитивное расширение (по теореме 2). Т.е. в этом случае получили минимальное примитивное расширение с помощью добавления дуг, т.е. ■

Для описания процедуры построения минимального примитивного расширения многоугольного графа была доказана теорема 4.

**Теорема 4.** Для любой биекции φ между множеством стоков и множеством источников многоугольного графа в соответствующем его φ-расширении существует контур длины .

Доказательство. Будем представлять многоугольные графы двоичными векторами. Двоичный вектор соответствует многоугольному графу , если для любого

Если в двоичном представлении графа последовательно идут два нуля или две единицы, то граф имеет вид, представленный на Илл. 1.

…

Илл. 1. Графическое

изображение графа

Если и единственные источник и сток соответственно в графе , то единственно возможное φ**-**расширение получается проведением дуги из вершины в вершину . Следовательно, получили контур длины

Если и не единственные источник и сток соответственно в графе , то для φ-расширений таких, что есть дуга из вершины в вершину , имеем контур длины Рассмотрим φ-расширение в котором нет дуги из вершины в вершину . Пусть данному φ-расширению графа соответствует граф . По теореме 1 является сильно связным графом, следовательно, из любого стока графа достижим любой его источник. В частности, в из вершины достижима вершина . По условию, , тогда в графе из стока есть дуга в некоторый источник , а из некоторого стока есть дуга в . Так как из вершины достижима вершина , то существует цепь из вершины в вершину , . Следовательно, в существует контур длины т.е. 3.

Следовательно, осталось рассмотреть многоугольные графы, у которых в двоичном векторе последовательно чередуется 0 и 1. Очевидно, что у таких графов четное число вершин, так как в противном случае, двоичный вектор будет начинаться и заканчиваться одним и тем же значением и тогда φ-расширение этого графа будет содержать контур длины .

Не теряя общности, будем доказывать для графа вида . имеет вершин, (по определению многоугольного графа). Пронумеруем их в порядке обхода по часовой стрелке . Вершины являются источниками, а вершины являются стоками. Пусть – φ**-**расширение графа .

Пусть таков, что , т.е. между парами вершин есть пары встречных дуг. Следовательно, в есть контур длины

Иначе, пусть и соответственно источник и сток графа , такие что , но . Данный граф имеет вид, представленный на Илл. 2.

. . .

Илл. 2. Графическое изображение выше

описанного графа

По теореме 1 является сильно связным графом, следовательно, из любого стока графа достижим любой его источник. В частности, в из вершины достижима вершина . По условию, , тогда в графе из стока есть дуга в некоторый источник , а из некоторого стока есть дуга в . Так как из вершины достижима вершина , то существует цепь из вершины в вершину , . Следовательно, в существует контур длины т.е. 3.

**Процедура построения минимального примитивного расширения многоугольного графа**

Входные данные: многоугольный граф , имеющий стоков (источников).

1. Пусть φ – произвольная биекция между множеством стоков и множеством источников данного графа Присоединим к все дуги вида , где – сток.
2. Если примитивен, то мы получили минимальное примитивное расширение исходного многоугольного графа. Конец.

В противном случае, – сильно связный не примитивный граф. Перейдем к шагу 3.

1. – сильно связный не примитивный граф, вследствие сильной связности каждая его дуга содержится в некотором контуре. Если в графе имеется контур длины , то присоединим к графу дугу . Теперь в есть контур , длина которого взаимно проста с . Следовательно, полученный граф примитивен. Конец.
2. Если в графе нет контура длины , то по теореме 4 в есть контур который имеет длину . Проведем встречную дугу для любой существующей в дуги. Теперь в есть контур, длина которого и контур, длина которого 2. Следовательно, полученный граф примитивен. Конец.

Линейный граф с вершинами – это граф, полученный из цепи переориентацией некоторых ее дуг. В линейном графе каждая вершина, кроме двух, называемых крайними, имеет степень 2, а крайние вершины имеют степень 1. Линейный граф относится к типу I, если его крайние вершины обе являются источниками или обе являются стоками, и относятся к типу II, если одна из крайних вершин – источник, а другая – сток. У линейных графов типа II количество источников равно количеству стоков.

**Теорема 6.** Для линейного графа типа II с стоками (источниками) его минимальное примитивное расширение получается добавлением не более чем дуг (либо либо ), т.е.

Доказательство. Пусть – линейный граф типа II с стоками (источниками). Так как в линейном графе типа II количество источников и стоков равно, то проведя дугу из крайней вершины, которая является стоком в крайнюю вершину – источник, получим многоугольный граф с стоком (источником). По теореме 3 для многоугольных графов с стоком (источником) справедлива оценка , следовательно, для линейных графов типа II получаем равенство Окончательно имеем . ■

**Теорема 7.** Для любого связного орграфа с стоками и источниками его минимальное примитивное расширение получается добавлением не более чем дуг (либо , либо ).

Доказательство. По теореме, доказанной в работе А.С. Кадушкиной (см. [3]), каждый связный орграф может быть перестроен в сильно связный путем добавления дуг.

Если полученный сильно связный граф является примитивным, то получили минимальное примитивное расширение с помощью добавления дуг.

Иначе, имеем сильно связный, но не примитивный граф. По теореме 2 достаточно добавить одну дугу, чтобы получить минимальное примитивное расширение. Т.е. в этом случае получили минимальное примитивное расширение с помощью добавления дуг.

**Процедура построения минимального примитивного расширения произвольного связного орграфа.**

Входные данные: связный орграф , имеющий стоков и источников.

1. Обозначим – стоки, а – источники орграфа .
2. Из стоков проведем по одной дуге в каждый из источников, таким образом, чтобы в исходном графе образовался контур наибольшей длины. А именно, соединим сток с источником , Добавлением таких дуг всегда можно получить в исходном графе контур наибольшей длины (путем изменения нумерации стоков или источников). Если для исходного орграфа было верно , то полученный граф является сильно связным.
3. Если в орграфе остались источники, т.е. в исходном графе выполнялось неравенство , то в силу связности исходного графа в нем имеется дуга из каждого такого источника в некоторую вершину. Проведем для этой дуги встречную. Полученный граф является сильно связным.
4. Если в орграфе остались стоки, т.е. в исходном графе выполнялось неравенство , то в силу связности исходного графа в нем имеется дуга в каждый такой сток из некоторой вершины. Проведем для этой дуги встречную. Полученный граф является сильно связным.
5. Если полученный граф примитивен, то мы получили минимальное примитивное расширение исходного связного графа. Конец.

В противном случае, имеем сильно связный не примитивный граф.

1. Имеем сильно связный не примитивный граф, вследствие сильной связности каждая его дуга содержится в некотором контуре. Если в графе имеется контур длины , то присоединим к графу дугу . Теперь в графе есть контур , длина которого взаимно проста с . Следовательно, полученный граф примитивен. Конец.
2. Если в графе среди всех контуров наибольшую длину имеет контур длины , то проведем встречную дугу для любой существующей в графе дуги. Теперь в графе есть контур, длина которого и контур, длина которого 2. Следовательно, полученный граф примитивен. Конец.
3. Если в графе все контуры имеют длину и пусть в графе есть контуры и тогда проведем дугу из в Теперь в графе есть контур, длина которого и контур, длина которого 2. Следовательно, полученный граф примитивен. Конец.

Таким образом, получены полные решения задач о минимальном примитивном расширении путем добавления дуг для многоугольных графов и линейных графов типа II. Эти результаты обобщены на произвольные связные ориентированные графы. Для указанных типов графов найдены оценки количества добавочных дуг, описаны алгоритмы построения минимальных примитивных расширений. Составлен каталог многоугольных графов, φ-расширения которых не являются примитивными графами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Салий В. Н.* Оптимальные реконструкции графов // Современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры. Саратов: Изд**-**во Сарат. ун**-**та, 2008. С. 59–65.
2. *Гавриков А. В.* Оптимальная эйлерова реконструкция орграфа путем добавления дуг // Компьютерные науки и информационные технологии: материалы науч. конф. Саратов: Изд**-**во Сарат. ун*-*та, 2010. С. 41–44.
3. *Кадушкина А. С.* Минимальные сильно связные реконструкции ориентированных графов // Компьютерные науки и информационные технологии: материалы науч. конф. Саратов: Изд**-**во Сарат. ун**-**та, 2010. С. 65–70.
4. *Салий В. Н.* Минимальные примитивные расширения ориентированных графов// Прикладная дискретная математика – 2008. – №1(1). С. 116–119.
5. *Wielandt H.* Unzerlegbare nicht negative Matrizen // Math. Zeitschr. 1950. No. 52. P. 642-648.