**О ПРОБЛЕМАХ РАЗРЕШИМОСТИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ТЕОРИЙ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ПЛАНАРНЫХ АВТОМАТОВ**

**В.А. Молчанов**

*Саратовский государственный университет, Саратов, Россия*

Работа посвящена исследованию проблем разрешимости элементарных теорий полугрупповых автоматов, у которых множество состояний и множество выходных сигналов наделены дополнительной структурой плоскости, сохраняющейся функцией переходов и функцией выходов автомата.

Под плоскостью [1] будем понимать систему вида Π=(*X,L*), где *X* – непустое множество точек и *L* – семейство его подмножеств, именуемых прямыми, удовлетворяющее следующим аксиомам:

(A1) через любые две точки проходит одна и только одна прямая;

(A2) каждая прямая содержит по крайней мере три точки;

(A3) в множестве *X* есть три точки, не лежащие на одной прямой.

В частности, плоскость Π является проективной, если любые две ее прямые имеют общую точку, и аффинной, если для любой прямой *l*∈*L* и любой точки *x*∈*X\l* существует такая единственная прямая *l'*∈*L*, что *x*∈*l'* и *l*∩*l'*=∅.

Пусть Π=(*X,L*), Π′=(*X',L'*), – плоскости. Отображение *ϕ* : *X → X'* называется гомоморфизмом Π в Π′, если оно прямые плоскости Π отображает в прямые плоскости Π′. Множество всех гомоморфизмов Π в Π′ обозначается Hom (Π,Π′).

Гомоморфизм плоскости Π в себя называется эндоморфизмом Π. Множество всех эндоморфизмов плоскости Π с операцией композиции образует полугруппу End Π. Для плоскостей Π,Π′ обозначим *S*(Π,Π′) полугруппу с основным множеством End Π × Hom (Π,Π′) и операцией умножения [2] (*ϕ,ψ*)⋅(*ϕ*1*,ψ*1) = (*ϕϕ*1,*ϕψ*1), где *ϕ,ϕ*1∈End (Π) и *ψ,ψ*1∈Hom (Π,Π′).

Под автоматом будем понимать алгебраическую систему , состоящую из множества состояний *Q*, полугруппы входных символов *S*, множества выходных символов *B*, функции перехо­дов  и функции выходов , для которых при любых значениях  выполняются равенства:

 

Для каждого входного символа  определяются функция переходов  и функция выходов  по формулам:  и , где .

Следуя [2] автомат  называется планарным, если его множество состояний *Q* и множеством выходных сигналов *B* наделены такими структурами плоскостей Π*Q*=(*Q,LQ*) и Π*B*=(*B,LB*), что для любого  функция переходов  является эндоморфизмом плоскости Π*Q* и функция выходов  является гомоморфизмом Π*Q* в Π*B* . Такой автомат символически обозначается .

Для любых плоскостей Π*Q* и Π*B* автомат  с полугруппой входных сигналов , функцией переходов  и функцией выходов  (здесь  и  ) является планарным автоматом, который обозначается . Такие автоматы называются универсальными планарными автоматами, так как их подавтоматы охватывают гомоморфные образы всех планарных автоматов. Основной результат работы [3] показывает, что универсальные планарные автоматы полностью определяются (с точностью до изоморфизма) своими полугруппами входных сигналов.

Для описания свойств планарного автомата  на языке узкого исчисления предикатов (УИП) этот автомат рассматривается в виде многосортной алгебраической системы с пятью базисными множествами , двумя бинарными отношениями принадлежности точек плоскостей их прямым и

тремя бинарными операциями – умножением входных сигналов, функцией переходов и функцией выходов автомата. Элементарная теория таких автоматов определяется в стиле аксиоматики Гильберта геометрии плоскости с помощью языка УИП с многосортными переменными ***LA*** (см, например, [4]).

Пусть ***K*** – класс планарных автоматов. Множествопредложений языка ***LA***, истинных на всех автоматах из класса ***K***, обозначается символом Th(***K***) и называется элементарной теорией класса автоматов ***K***. Согласно [5] теория Th(***K***) называется разрешимой, если существует эффективная процедура, позволяющая по любому предложению Φ языка ***LA*** определить принадлежит или нет Φ теории Th(***K***). Если теория Th(***K***) не является разрешимой, то она называется неразрешимой. Если же теория Th(***K***) не имеет разрешимых подтеорий, то она называется наследственно неразрешимой.

Обозначим символом  множество всех предложений языка ***LA***. Для класса планарных автоматов ***K*** обозначим символом ***Kfin*** класс конечных автоматов из ***K***. Согласно [5] теория Th(***K***) называется эффективно неотделимой, если рекурсивно неотделимы множества Th(***K***) и \Th(***Kfin***), т. е. не существует таких непересекающихся рекурсивных множеств , что Th(***K***)⊂Φ и \Th(***Kfin***)⊂Ψ.

Доказанная в [6] относительно элементарная определимость [5] класса универсальных планарных автоматов в классе всех полугрупп дает возможность проанализировать взаимосвязь важных проблем алгоритмической разрешимости элементарных теорий классов универсальных планарных автоматов и классов полугрупп.

**Теорема.** Пусть ***K*** – класс универсальных планарных автоматов и Inp(***K***) – класс полугрупп входных сигналов автоматов из класса ***K***. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. если элементарная теория Th(***K***) класса автоматов ***K*** наследственно неразрешима, то и элементарная теория Th(Inp(***K***)) класса полугрупп Inp(***K***) наследственно неразрешима;
2. если элементарная теория Th(***K***) класса автоматов ***K*** эффективно неотделима, то и элементарная теория Th(Inp(***K***)) класса полугрупп Inp(***K***) эффективно неотделима.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Картеси Ф.* Введение в конечные геометрии. М. : Наука, 1980. 320 с.

2. *Плоткин Б. И., Гринглаз Л.Я., Гварамия А.А.* Элементы алгебраической теории автоматов. М. : Высшая школа, 1994. 192 с.

3*. Molchanov V. A.* A universal planar automaton is determined by its semigroup of input symbols // Semigroup Forum. 2011. V. 82. P. 1–9.

4. *Молчанов В. А.* Нестандартные многообразия топологических алгебраических систем // Известия РАЕН, серия МММИУ. 1999. Т. 3, номер 1. С. 14–45.

5. *Ершов Ю. Л.* Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М. : Наука, 1980. 416 с.

6. *Молчанов В. А.* Об относительно элементарной определимости класса универсальных планарных автоматов в классе всех полугрупп // Тезисы докладов, Международная конференция «Алгебра и математическая логика», посвященная 100-летию со дня рождения В.В. Морозова. Казань: Изд-во Казанского (Приволжского) федерального ун-та. 2011. С. 145–147.