АНАЛИЗ СЛОЖНОСТИ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ ОТ ТРЁХ И ЧЕТЫРЁХ ПЕРЕМЕННЫХ

Кисляков И.А.

*Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия*

Технические системы и устройства, которые допускают автоматные модели, представимы декомпозицией на комбинационную часть и память. Математическими моделями комбинационных схем являются функции алгебры логики. Сложность комбинационных схем непосредственно связана со сложностью функций алгебры логики. Введённые Э. Постом свойства функций алгебры логики (5 замечательных классов) формально определяют 32 класса функций алгебры логики – 15 непустых и 17 пустых. Было проведено исследование подклассов 15 непустых классов, содержащих функции от трёх и четырёх переменных.

Исследовалось свойство сложности подклассов по следующим показателям:

1. Сложность по нулевому и первому уровню и спектра , разработанного Твердохлебовым В.А. [1].
2. Сложность бесповторных, 2-повторных и *n*-повторных функций алгебры логики.
3. По наибольшему и наименьшему числу конституент.
4. По числу склеиваемых конституент в методе минимизации функций алгебры логики Квайна–Мак-Класки.

Для формулировки полученных результатов введём следующие понятия, обозначения и преобразования.

Табличное задание функций алгебры логики преобразуем в последовательность. Для этого область определения функций алгебры логики плотно упакуем в последовательность по методу, изложенному в работе Липпела и Эпштейна [2]. В результате область определения оказывается представленной последовательностью длины 10 (для функций от трёх переменных) и длины 19 (для функций от четырёх переменных).

В соответствии с полученными плотными упаковками областей определения для каждой функции определяется последовательность значений функции. Оценивается сложность последовательностей, определяющих функции алгебры логики, и результат распространяется на функции.

Первые два уровня и , разработанного Твердохлебовым В.А. пятиуровневого спектра определяются следующим образом.

Рекуррентной формой называется форма вида , выражающая каждый член последовательности через предыдущих членов.

По определению , где – наименьший порядок рекуррентной формы, определяющей всю последовательность . На уровне расположено чисел , определяющих для порядков от 1 до размеры наибольших определяемых начальных отрезков последовательности .

Функция алгебры логики полагается *n*–повторной, если в её минимальную формулу каждая переменная входит не более *n* раз, а одна или несколько переменных входят точно *n* раз.

Полученные результаты:

1. Для каждого из 15 непустых классов, сопоставим пару чисел , характеризующих наибольшую и наименьшую сложность входящих в данный класс функций по уровню . Для функций от трёх переменных: (6;1), (7;2), (4;3), (1;1), (7;2), (4;3), (1;1), (6;2), (6;1), (4;1), (4;3), (3;1), (4;4), (4;4), (3;3). Для функций от четырёх переменных: (14;1), (15;1), (5;4), (1;1), (15;1), (5;4), (1;1), (13;2), (14;1), (12;3), (7;4), (12;3), (8;4), (7;4), (4;4).
2. Для каждого из 15 непустых классов, получено разбиение на подклассы бесповторных , 2–повторных и *n*–повторных функций . Сопоставим каждому такому классу тройку чисел , определяющих мощности этих подклассов соответственно. Для функций от трёх переменных: (17;24;15), (18;22;20), (0;3;0), (1;0;0), (12;34;14), (0;3;0), (1;0;0), (6;21;15), (11;3;0), (0;4;0), (3;0;1), (0;3;0), (0;1;0), (0;0;1), (3;0;0). Для функций от четырёх переменных: (98;1409;13853), (144;1219;15013), (0;6;1), (1;0;0), (62;1406;14908), (0;6;1), (1;0;0), (57;1403;13778), (43;61;18), (18;122;876), (4;0;4), (15;100;861), (3;22;15), (0;0;4), (4;0;0).
3. Для каждого из 15 непустых классов, каждому подклассу бесповторных, 2-повторных и n-повторных функций , сопоставим пару чисел , определяющих наибольшую и наименьшую сложность входящих в этот подкласс функций. Для функций от трёх переменных: ((6;1), (5;2), (5;2)), ((7;2), (6;2), (5;2)), ((-;-), (4;3), (-;-)), ((1;1), (-;-), (-;-)), ((7;2), (6;2), (5;2)), ((-;-), (4;3), (-;-)), ((1;1), (-;-), (-;-)), ((4;3), (6;2), (5;2)), ((6;1), (4;3), (-;-)), ((-;-), (4;1), (-;-)), ((3;3), (-;-),(4;4)), ((-;-), (3;1), (-;-)), ((-;-), (4;4), (-;-)), ((-;-), (-;-), (4;4)), ((3;3), (-;-), (-;-)). Для функций от четырёх переменных: ((14;1), (13;3), (13;2)), ((15;2), (14;3), (14;1)), ((-;-), (5;4), (5;5)), ((1;1), (-;-), (-;-)), ((15;2), (14;3), (14;1)), ((-;-), (5;4), (5;5)), ((1;1), (-;-), (-;-)), ((12;3), (13;3), (13;2)), ((14;1), (12;4), (9;4)), ((6;4), (10;3), (12;3)), ((4;4), (-;-),(7;4)), ((8;4), (9;3), (12;3)), ((8;5), (8;5), (8;4)), ((-;-), (-;-), (7;4)), ((4;4), (-;-), (-;-)).
4. Для каждого из 15 непустых классов, сопоставим пару чисел, определяющих наибольшее и наименьшее количество конституент для функций данного класса. Для функций от трёх переменных: (7;1), (7;2), (4;4), (8;8), (6;1), (4;4), (0;0), (6;2), (7;1), (4;4), (4;4), (4;4), (4;4), (4;4), (4;4). Для функций от четырёх переменных: (15;1), (15;2), (8;8), (16;16), (14;1), (8;8), (0;0), (14;2), (7;1), (11;5), (15;1), (11;5), (11;5), (8;8), (8;8).

Краткие выводы:

Проведённые с использованием вычислительных экспериментов исследования фундаментальных классов функций алгебры логики позволили получить числовые показатели сложности функций, которые можно использовать для упрощения комбинационных схем.

Ссылки:

1. Твердохлебов В.А. – «Геометрические образы законов функционирования автоматов».
2. B. Lippel, J.Epstein – «A Method for Obtaining Complete Digital Coding Chains»